

تمثيل المجموعات المرتبطة المنتهية

إذا كانت (E, \leq) مجموعة مرتبطة
 $x \leq y$ فإننا نقول أن x عنصر
 y يظهر العنصر x إذا كانت:
 $x \leq y$
 - إذا لم يكن بالمكان إيجاد عنصر مثل y حقيقة:
 $x \leq y \leq z$

مبرهنة واريون

في أية مجموعة مرتبطة منتهية يكون:
 1) كل عنصر غير أصغر يظهر على الأقل عنصراً
 واحداً
 2) كل عنصر غير أكبر يظهر على الأقل عنصراً واحداً

البرهان

1) ليكن y عنصر غير أصغر فهذا يعني أنه
 يوجد عنصر x الأقل من y حيث

$$x < y$$

إذا كان y يظهر x_1 يكون قد تم المطلوب
أما إذا لم يكن كذلك فإنه يوجد عنصر مثل
 x_2 حيث يكون

$$x_1 < x_2 < y$$

إذا كان y يظهر x_2 يكون قد تم المطلوب
أما إذا لم يكن كذلك فإنه يوجد عنصر مثل
 x_3 حيث يكون

$$x_2 < x_3 < y$$

وهكذا...

وبما أن المجموعة E منتهية فلها أسفل هنا

فك عنصر x_p الذي يكون ظهر بواسطة y

وذلك مشابه يمكن البهانه فك (2)

القول بالرسم (أو بالمنظور)



لكن (2) (E) مجموعة مرتبة فيك

تمثيلها كما يلي

- كل عنصر من عناصرها يقابل نقطة واحدة على الخط

- إذا كانت العنصر y يقابل العنصر x فإن النقطة

x ترتبط بالنقطة y بواسطة قطعة مستقيمة

بينها وتتكون مساحة

ويجب الانتباه إلى أنه العناصر الذاتية

(الاعظمية) تمثل الكثر الفعلي للمجموعة من الكل

وإنه أب عنصريين يمكن مقارنته إذا وفقط إذا

كان مرتبطين فيما بينها بخط صاعد

أمثلة

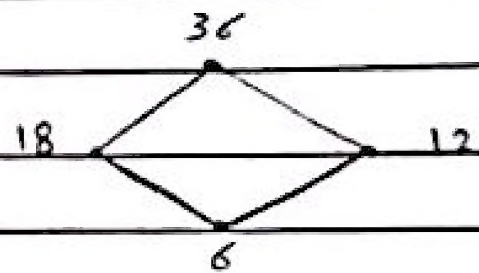
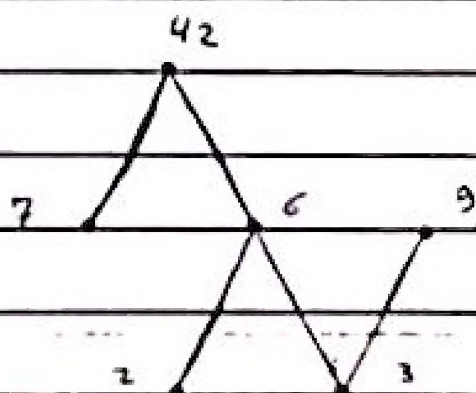
من الأمثلة التي جميعها مجموعات جزئية

فترقية من المجموعة الجزئية (أو M^*)

$$(1) \{ 36, 18, 12, 6 \}$$

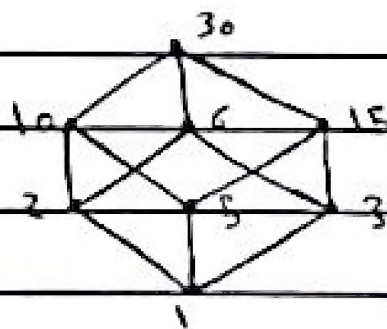
$$(2) \{ 42, 9, 7, 6, 3, 2 \}$$

$$(3) \{ 30, 15, 10, 5, 3, 2, 1 \}$$



(1)

(2)



(3)

الشبكات

تعريف:

لشبكة (E, R) مجموعة مرتبة:

• نقول بأن E مغلفة شبكة عليا إذا كانه أي

زوج من العناصر $\{x, y\}$ من E يملك

عنصر أعلى أصغر في E وليكتب

$$\sup \{x, y\} = x \vee y$$

وتقرأ $(x \text{ أو } y)$. وبعض الكتب تستخدم الرمز

$$x \vee y = x \cup y = x + y$$

• نقول بأن E مغلفة شبكة دنيا إذا كانه من

أجل أي زوج من العناصر $\{x, y\}$ من E

يملك عنصر أدنى أصغر في E وليكتب

$$\inf \{x, y\} = x \wedge y$$

ونقرأ (x, y) بعض الكتب تقدم الرمز

$$x \wedge y = x \cap y = x \cdot y$$

ونقول عن E بأنها شبكة إذا كانت تحقق الوقت

بصفة شبكة عليا وديا

نلاحظ بأنه تحقق الشبكة العليا من أهل علاقة

الترتيب \leq واهم الد بصفة شبكة عليا من أهل

علاقة الترتيب \Rightarrow

أعطاء

(1) من أهل أي مجموعة E فإنه $(x, y) \in P(E)$

هي شبكة فإذا كانت x و y مجموعتان هيرشيات

من E فإنه

$$x \wedge y = x \cap y$$

$$x \vee y = x \cup y$$

(2) (M^*, \wedge) تكون شبكة حيث:

$$x \vee y = \text{lcm}(x, y)$$

رمز للقاسم المشترك البسيط

$$x \wedge y = \text{gcd}(x, y)$$

رمز للقاسم المشترك الأعظم

(3) كل سلة تكون شبكة حيث:

$$x \wedge y = \min(x, y)$$

$$x \vee y = \max(x, y)$$

عبارة

في شبكة الشبكة العليا (تحت) فإن قانون

الربط $x \vee y$ يحقق الخواص:

المادة: نظرية المجموعات المعاصرة

$$(1) \text{ الكامية لـ } A \text{ أنه } (x \vee x = x)$$

$$(2) \text{ التبعية لـ } A \text{ أنه } (x \vee y = y \vee x)$$

$$(3) \text{ التجميعية لـ } A \text{ أنه } (x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z)$$

البرهان

الكامية المجموعة والثانية والاختصاصية، لنفرض

الكامية الثالثة:

$$\Leftarrow \text{ لنفرض أنه } S = x \vee (y \vee z)$$

$$\Leftarrow S \gg x \text{ و } S \gg y \vee z$$

$$\Leftarrow S \gg x \text{ و } S \gg y \text{ و } S \gg z$$

$$\Leftarrow S \gg x \vee y \text{ و } S \gg z$$

$$S \gg (x \vee y) \vee z$$

وهذا ينتج

$$x \vee (y \vee z) \geq (x \vee y) \vee z \quad \dots\dots (1)$$

إذا فرضنا $M = (x \vee y) \vee z$ فإن:

$$\Leftarrow M \geq z \quad , \quad M \geq x \vee y$$

$$\Leftarrow M \geq z \quad , \quad M \geq y \quad , \quad M \geq x$$

$$\Leftarrow M \geq y \vee z \quad , \quad M \geq x$$

$$\Leftarrow M \geq x \vee (y \vee z)$$

$$(x \vee y) \vee z \geq x \vee (y \vee z) \quad \dots\dots (2)$$

من (1) و (2) تتبع المساواة.

ملحقات:

(1) إن هذه المبرهنات يمكن أيضاً صيغتها من أجل

الشبكات الدنيا مع قانون التشكيل الدائري

$$x \wedge y$$

(2) البرهان السابق يبين أنه $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

ما هو الـ $\sup \{x, y, z\}$ فيكون أنه

نكتب $x \vee y \vee z$ بدلا من $(x \vee y) \vee z$

(3) يمكن الاستنتاج مباشرة أنه كل مجموعة منهية

منهية غير خالية من نصف شبكة عليا تلك مجموعة

أعلى أصغرى ثابتة و شابة من أهل نصف الشبكة

أيضا (أي أنه أي مجموعة منهية منهية من نصف الشبكة

أيضا تلك مجموعة أعلى أصغرى ثابتة و شابة من أهل نصف الشبكة)

أي الـ أعلى أصغرى ثابتة و شابة من أهل نصف الشبكة (أي مجموعة أعلى أصغرى ثابتة و شابة من أهل نصف الشبكة)

لنكن E مجموعة بقانون تشكيل دافلي والذو نمر

له $x \vee y$ فنحن هل يمكن تعريف علاقة

التي E التي E أعلى أصغرى ثابتة و شابة من أهل نصف الشبكة يكون

$$\sup_E \{x, y\} = x \vee y$$

الدراسة السابقة تشير إلى شروط ضرورية وهي:

(1) هم القانون \vee يجب أن يحقق الكواحد الكلاسيكية والتبيلية

والتبيلية

$$x \vee y = y \Leftrightarrow \sup_E \{x, y\} = y \Leftrightarrow x \leq y$$

نبدأ مرة أخرى من هنا
عبر عنه

لتكن E مجموعة مزودة بقانون التشكيل الدافلي

$x \vee y$ والتي يجب أن يحقق الكواحد الكلاسيكية والتبيلية

والتبيلية عندئذ [توجد علاقة ترتيبية وحيدة يريها]

E هي مجموعة E نصف شبكة عليا [رأى هو يري]

المعطيات x, y عند E فالتة:

$$\{ \sup_E \{x, y\} = x \vee y$$

البرهان

لنثبت ان العلاقة ترقيعية فهي هنا تكون معرفة

بالشكل $x \leq y$ اذا وفقط اذا كان $x \vee y = y$

وستكون عملية

لنكن R علاقة معرفة بالشكل:

$$x \vee y = y \iff x R y$$

لنكن R انعكاسية لان:لأن $x \vee x = x$

$$x R x \iff (x \vee x = x)$$

لنكن R متشعبة لان:

$$y \vee z = z, x \vee y = y \iff y R z, x R y$$

$$x \vee z = x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z = z \iff$$

$$x R z \iff x \vee z = z \iff$$

ملاحظة: P مخالفة لـ \leq

$$\left\{ \begin{array}{l} x \vee y = y \iff x P y \\ x \vee y = x \iff y \vee x = x \iff y P x \end{array} \right.$$

نريد أن نثبت أن $x \vee y = y \vee x$ لـ $x, y \in E$

$$\Rightarrow x = y$$

بالتالي فإن P تكون علاقة ترتيب على E

ونفرض لطالب $x \leq y$

لنثبت الآن أن (E, \leq) هي شبكة عليا:

ليكن $x, y \in E$ فإن: $x \leq x \vee y$ وذلك

$$\begin{aligned} x \vee (x \vee y) &= (x \vee x) \vee y \\ &= x \vee y \Rightarrow x \leq x \vee y \end{aligned}$$

وكذلك فإن: $y \leq x \vee y$ وذلك لأن:

$$y \vee (x \vee y) = (x \vee y) \vee y = x \vee (y \vee y)$$

$$= x \vee y \Rightarrow y \leq x \vee y$$

لدينا $x \vee y$ هو أصغر العنصر للجموعة $\{x, y\}$ في E

ليكن M هو أصغر آفر للجموعة $\{x, y\}$

$$(x \vee y) \vee M = x \vee (y \vee M) = x \vee M = M$$

$$\Rightarrow x \vee y \leq M$$

لدينا $x \vee y$ هو أصغر العنصر للجموعة $\{x, y\}$

في E

$$x \vee y = \sup_E \{x, y\}$$

وبالتالي فإن E تكون بصفة شبيكة عليا.

ملحوظات

يمكن التبرهن أيضاً أنه قانون التشكيل الدافلي

$x \wedge y$ والذين يحققوا الخاصية الكاسدية والتبيلية

والتي يمكن تعريفها ببناء لنسبة شبكة دنيا

وعلاقة مع ترتيب الترتيب:

$$x \wedge y = x \iff x \leq y$$

وحيث يمكن أن يكون:

$$\inf_{\mathcal{E}} \{x, y\} = x \wedge y$$

كذلك فإن أي قانون تشكيل داخلي $x \top y$ يحقق

الخاصة الجمعية والتبعية والتبعية على المجموعة E

يمكن أن يعرف علاقة ترتيبية:

(1) $x \leq_1 y$ والمعرفة بالشكل التالي

$$x \top y = y \text{ وتكون عندها } (x \leq_1 y) \text{ و } (F)$$

نفس شبكة عليا.

$$x \top y = x \vee y \text{ و } \dots$$

المادة: نظرية الشكك المحاضرة: الثالثة

(2) $x \leq_2 y$ فالمعرفة بالشكل التالي:

$$xTy = x \text{ وتكون عندها}$$

(2) (E, \leq_2) نصف شبكة دنيا

$$xTy = x \wedge y$$

~~المحاضرة~~